Devoir sur Table 6

Durée : 4h

- Tous les documents sur papier sont interdits.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées.
- Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
- La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
- Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
- Mettez en évidence vos résultats en les encadrant.
- Conformément au règlement de la Banque PT
  - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
  - L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :

- Mise en évidence des résultats
- Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
- Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
- Respect de la grammaire et de l'orthographe

Exercice 1

(*adapté de Banque PT, Maths B, 2019*)

Dans cet exercice, l'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

On considère la famille de droites $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'équation cartésienne

$$(t^2-1)x - 2ty = 2t(t-1).$$

1. *Question préliminaire.* Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $(a,b)\neq(0,0)$. On considère alors la droite D d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ ainsi que le point M_0 de coordonnées $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.
   (a) Démontrer que les coordonnées du projeté orthogonal H_0 de M_0 sur la droite D sont : $\left(x_0 - a\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}, y_0 - b\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}\right)$.
   (b) En déduire la distance $d(M_0,D)$ du point M_0 à la droite D.
2. (a) Déterminer l'ensemble des points du plan équidistants des droites D_{-1}, D_0 et D_1.
   (b) En déduire qu'il existe un unique point, dont on précisera les coordonnées, équidistant de toutes les droites $D_t, t\in R$.
3. (a) Soit t un réel fixé. Donner un point, un vecteur directeur puis une représentation paramétrique de la droite D_t.
   (b) Démontrer qu'une représentation paramétrique de l'enveloppe Γ de la famille de droites $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{2t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{(1-t)^2}{1+t^2} \end{cases}, t\in\mathbb{R}$$

4. On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre $\Omega(1,1)$ et de rayon 1.
   (a) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}$
   (b) Montrer que $\Gamma \subset \mathscr{C}$
   (c) A-t-on $\Gamma = \mathscr{C}$? Une réponse justifiée est attendue.

Exercice 2

(adapté de Banque PT, Maths C, 2025)

Dans cet exercice, l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère la conique $\mathcal{C}$ d'équation

$$23x^2 - 72xy + 2y^2 + 8x + 69y = 108$$

1. Écrire la matrice A associée à l'équation de la conique $\mathcal{C}$.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
3. Donner une équation réduite de $\mathcal{C}$ ainsi qu'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}'$ dans lequel cette équation est obtenue.
4. Donner la nature de $\mathcal{C}$
5. Déterminer les principaux éléments caractéristiques de $\mathcal{C}$ (centre éventuel, sommets, asymptotes éventuelles). Les coordonnées des points et les équations des éventuelles asymptotes seront données dans le repère $\mathcal{R}'$ puis dans le repère $\mathcal{R}$
6. Tracer $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}$ sur la feuille de papier millimétrée fournie.

   On mettra en évidence le repère $\mathcal{R}'$ ainsi que les éléments déterminés dans la question 5. On prendra $\sqrt{2} \simeq 1.4$ Unité : 2 cm .

Exercice 3

(Banque PT, Maths A, 2019)

Pour A appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note $A^\top$ la transposée de la matrice A. est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite antisymétrique si $A^\top = -A$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que tout matrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

3. En déduire une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ et $\dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R}))$.
4. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, $\det(A) = 0$.
5. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, il existe un unique vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ tel que A soit la matrice de l'application $v \mapsto w \wedge v$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
6. Soit r une rotation dans $\mathbb{R}^3$ d'angle différent de π (modulo 2π) et soit R sa matrice dans la base canonique.
   (a) Montrer que $R - R^{-1} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Soit w l'unique vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $R - R^{-1}$ soit la matrice de l'application $u : v \mapsto w \wedge v$ dans la base canonique. Montrer que $w \neq 0$.
   (c) Soit $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $r(v) = v$. Montrer que $u(v) = 0$.

   En déduire que l'axe de la rotation est dirigé par w.
   (d) On suppose que l'axe de la rotation r est orienté selon w et soit $\theta \in [0, 2\pi[$ une mesure de l'angle de r. On pose $e_3 = \dfrac{w}{\|w\|}$ et on considère une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3).
      i. Écrire les matrices de r et de r^{-1} dans cette base.

ii. Écrire la matrice de u dans cette base.

iii. En déduire que $\sin\theta > 0$, puis que $\theta = \arccos\left(\dfrac{\mathrm{Tr}(R)-1}{2}\right)$

(e) Identifier l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Problème

(adapté de Banque PT, Maths B, 2017)

Dans ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 fixé et $\mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n.

Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on note $\mathcal{B}_{k,n}(X)$ le polynôme

$$\mathcal{B}_{k,n}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}.$$

Pour $p = 2$ ou 3, $\mathbb{R}^p$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé d'origine O.

Si $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sont $(n+1)$ points de $\mathbb{R}^p$, on appelle courbe de Bézier associée aux points de contrôle $A_0, A_1, \ldots, A_n$, la courbe paramétrée définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall t \in [0,1], \quad \overrightarrow{OM(t)} = \sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(t)\overrightarrow{OA_k}.$$

Enfin, on note $[\![0;n]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre 0 et n.

Questions de cours

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathcal{B}_{k,n}(X)$.
2. Soient $t \in [0,1]$ et X_n une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ telle que pour tout k dans $[\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(X_n = k) = \mathcal{B}_{k,n}(t)$.
   (a) Donner le nom et le(s) paramètre(s) de la loi de probabilité suivie par X_n.
   (b) Préciser l'espérance et la variance de X_n.
   (c) Donner un exemple d'une telle variable aléatoire X_n.
3. Rappeler quelle est la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Donner la définition de deux espaces vectoriels orthogonaux pour un produit scalaire noté φ.

Préliminaires

5. Développer les polynômes $\mathcal{B}_{k,2}(X)$ pour $0 \leqslant k \leqslant 2$, et les polynômes $\mathcal{B}_{k,3}(X)$ pour $0 \leqslant k \leqslant 3$.
6. Démontrer que $(\mathcal{B}_{k,2}(X))_{0\leqslant k\leqslant 2}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
7. Démontrer que $(\mathcal{B}_{k,n}(X))_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie I — Un produit scalaire

On considère la fonction φ définie pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + \frac{1}{4}\left(4P\left(\frac{1}{2}\right) - P(1) - P(0)\right)\left(4Q\left(\frac{1}{2}\right) - Q(1) - Q(0)\right).$$

8. (a) Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Orthonormaliser, pour le produit scalaire φ, la base $(X^2, X, 1)$ de $\mathbb{R}_2[X]$. On exprimera cette nouvelle base orthonormée à l'aide des polynômes $(\mathcal{B}_{k,2}(X))_{0\leqslant k\leqslant 2}$.

9. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base $(\mathcal{B}_{2-k,2}(X))_{0\leqslant k\leqslant 2}$ est :
$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Justifier sans calcul que la matrice M est diagonalisable.
   (b) Diagonaliser M. On prendra, si possible, une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de M et on précisera la matrice diagonale D, la matrice de passage Q, son inverse Q^{-1} ainsi que la relation liant ces matrices.
   (c) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
   (d) Démontrer que les sous-espaces propres de f sont orthogonaux pour φ.

10. On suppose dans cette question que n est à nouveau quelconque. Démontrer qu'il existe un produit scalaire Ψ sur $\mathbb{R}_n[X]$ pour lequel la base $(\mathcal{B}_{k,n}(X))_{0\leqslant k\leqslant n}$ est orthonormée. On pourra exprimer ce produit scalaire à l'aide des coordonnées des polynômes dans la base $(\mathcal{B}_{k,n}(X))_{0\leqslant k\leqslant n}$.

Partie II — Une première courbe de Bézier dans le plan

Dans cette partie et les deux suivantes, on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère la courbe de Bézier Γ_1 associée aux points de contrôle A_0, A_1, A_2 et A_3 de coordonnées respectives $(0,0)$, $(2,2)$, $(1,3)$ et $(1,-1)$. On considère également la courbe Γ_2 dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_2(t) & = & 6t - 9t^2 + 4t^3 \\ y_2(t) & = & 6t - 3t^2 - 4t^3 \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

11. (a) Donner une représentation paramétrique de Γ_1.
    (b) Quelle remarque peut-on faire concernant les courbes Γ_1 et Γ_2 ?
12. *Étude de* Γ_2.
    (a) Construire les tableaux de variations des fonctions x_2 et y_2.
    (b) Déterminer les points réguliers de Γ_2 dont la tangente à Γ_2 est horizontale ou verticale.
    (c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à Γ_2 au point de paramètre $t = 0$.
    (d) Déterminer le point singulier de Γ_2. Préciser sa nature ainsi que la tangente à Γ_2 en ce point.
    (e) Donner la nature des branches infinies de Γ_2. Illustrer la réponse par un schéma sur la copie.
13. Tracer dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, la courbe Γ_1, les points A_0, A_1, A_2 et A_3 ainsi que les tangentes à Γ_1 obtenues aux questions précédentes.
    On utilisera la feuille de papier millimétrée fournie. Le tracé de Γ_2 n'est pas demandé. Il est conseillé de prendre une unité de 6 cm.

Partie III — Le cas général.

Dans cette partie, on se place encore dans le plan mais n est désormais quelconque.

On considère $(n+1)$ points de $\mathbb{R}^2$, $A_0, A_1, \ldots, A_n$, et on note Γ la courbe de Bézier associée aux points de contrôle $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

14. Que peut-on dire des points de Γ de paramètre $t = 0$ et $t = 1$?
15. On suppose dans cette question que les points A_0 et A_1 sont distincts. Démontrer que la tangente à Γ en A_0 et la droite (A_0A_1) sont confondues.
    On admettra que si les points A_n et A_{n-1} sont distincts, alors la tangente à Γ en A_n et la droite $(A_{n-1}A_n)$ sont confondues.
16. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. On considère la courbe Λ dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & P(t) \\ y(t) & = & Q(t) \end{array}\right., \ t \in [0,1]$.
    Est-il possible de trouver $(n+1)$ points $A_0, A_1, \ldots, A_n$ tels que Λ soit la courbe de Bézier associée aux points de contrôle $A_0, A_1, \ldots, A_n$?

Pierre Bézier (1910-1999) est un ingénieur (Arts et Métiers et Supélec) et un docteur en mathématiques français. Il est le père fondateur de la CAO. Il fit carrière chez Renault où il mit au point les premières machines transfert.

Les courbes qui portent son nom, décrites en 1962, sont utilisées pour concevoir des pièces pour automobiles à l'aide d'ordinateurs. Elles sont également utilisées dans de nombreux logiciels de dessin et pour certaines polices de caractère.

Les polynômes $\mathcal{B}_{k,n}$ *sont appelés polynômes de Bernstein.*

Sergei Bernstein (1880-1968) est un mathématicien ukrainien dont les travaux ont porté sur les équations différentielles, l'analyse fonctionnelle et les probabilités.

Corrigé

Corrigé de l'exercice 1

1. (a) Les coordonnées du point H_0 peuvent, par définition du projeté orthogonal, s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} x_h &= x_0 + \lambda a \\ y_h &= y_0 + \lambda b \end{aligned}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. De plus ce point appartient à la droite D, d'où

$$a(x_0 + \lambda a) + b(y_0 + \lambda b) + c = 0$$

On tire alors de cette équation la valeur de λ, on obtient :

$$\lambda = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$$

D'où les coordonnées du point H_0 :

$$\boxed{\left(x_0 - a\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}, y_0 - b\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\right)}$$

(b) On sait que $d(M_0, D) = \|\overrightarrow{M_0H_0}\|$, d'où

$$\begin{aligned} d(M_0, D) &= \left\|\left(a\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}, b\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\right)\right\| \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{a^2 + b^2}\|(a, b)\| \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{d(M_0, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

2. (a) On a

$$\begin{cases} D_0 : x &= 0 \\ D_{-1} : y &= 2 \\ D_1 : y &= 0 \end{cases}$$

Un point M de coordonnées (x, y) est donc, d'après la question précédente, équidistant des trois droites si, et seulement si $|x| = |y - 2| = |y|$.

En particulier $(y - 2)^2 = y^2$ d'où l'on tire $y = 1$, et donc $x \in \{-1, 1\}$. Les points de coordonnées $(1, 1)$ et $(-1, 1)$ vérifiant bien les conditions précédentes, on en déduit que

$\boxed{\text{Les points équidistants des trois droites } D_0, D_{-1}, D_1 \text{ sont les points de coordonnées } (1,1) \text{ et } (-1,1).}$

(b) Soit un point M de coordonnées (x, y) équidistant de toutes les droites (D_t) pour $t \in \mathbb{R}$. Alors ce point est en particulier équidistants des droites D_0, D_{-1}, D_1. Ainsi d'après la question précédente, le point M est l'un des deux points de coordonnées $(1, 1)$ ou $(-1, 1)$.

On a de plus pour tout $t \in \mathbb{R}$ et d'après la question 1b :

$$d((1, 1), D_t) = \frac{|t^2 - 1 - 2t - 2t(t - 1)|}{\sqrt{(t^2 - 1)^2 + 4t^2}}$$

$$= \frac{|-1-t^2|}{\sqrt{(1+t^2)^2}}$$
$$= 1$$

et

$$d\left((-1,1), D_t\right) = \frac{|1-3t^2|}{t^2+1}$$

Cette distance n'est pas constante.

Ainsi $\boxed{\text{il existe un unique point équidistant de toutes les droites } (D_t)_{t\in\mathbb{R}}}$. Ce point est $\boxed{\text{le point de coordonnées } (1,1).}$

3. (a) $\boxed{\text{Le point de coordonnées } (0, 1-t) \text{ est un point de la droite } D_t}$. De plus, de l'équation de la droite D_t, on obtient que le vecteur de coordonnées $\big(t^2-1, -2t\big)$ est un vecteur normal à D_t et donc $\boxed{\text{le vecteur de coordonnées } (-2t, 1-t^2) \text{ est un vecteur directeur de } D_t}$.

On en déduit donc le paramétrage suivant de la droite D_t :

$$\boxed{D_t = \{M(-2t\lambda, 1-t+\lambda(1-t^2)) \ , \ \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

(b) Cherchons une fonction λ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que la courbe paramétrée par

$$t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) &= -2t\lambda(t) \\ y(t) &= 1-t+\lambda(t)(1-t^2) \end{cases}$$

vérifie que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le vecteur de coordonnées $(x'(t), y'(t))$ est colinéaire au vecteur de coordonnées $(-2t, 1-t^2)$, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\begin{vmatrix} x'(t) & -2t \\ y'(t) & 1-t^2 \end{vmatrix} = 0$$

On en déduit alors que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -2t \\ -1 & 1-t^2 \end{vmatrix} + \lambda(t) \begin{vmatrix} -2 & -2t \\ -2t & 1-t^2 \end{vmatrix} = 0$$

Et donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda(t) = \frac{-t}{1+t^2}$$

Ainsi la courbe Γ est la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) &= -2\dfrac{-t}{1+t^2} \\ y(t) &= 1-t+(1-t^2)\dfrac{-t}{1+t^2} = \dfrac{(1-t)^2}{1+t^2} \end{cases}$$

soit, comme attendu :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) &= \dfrac{2t^2}{1+t^2} \\ y(t) &= \dfrac{(1-t)^2}{1+t^2} \end{cases}}$$

4. (a) Le cercle $\mathscr{C}$ a pour équation

$$\boxed{(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1}$$

(b) Pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$(x(t)-1)^2 + (y(t)-1)^2 = \left(\frac{2t^2-1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{(1-t)^2-(1+t^2)}{1+t^2}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(1+t^2)^2}\left((t^2-1)^2+4t^2\right)\\
&= \frac{1}{(1+t^2)^2}\left(t^4-2t^2+1+4t^2\right)\\
&= \frac{1}{(1+t^2)^2}\left((t^2+1)^2\right)\\
&= 1
\end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{\Gamma \subset \mathscr{C}}$.

(c) Le point de coordonnées $(2,1)$ appartient à $\mathscr{C}$ mais pas à Γ puisque l'on ne peut pas avoir $\dfrac{2t^2}{1+t^2} = 2$ (cela implique $2=0$). Ainsi $\boxed{\Gamma \neq \mathscr{C}}$.

Corrigé de l'exercice 2

1. La matrice A associée à l'équation de la conique $\mathcal{C}$ est

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 23 & -36 \\ -36 & 2 \end{pmatrix}}$$

2. On a

$$\chi_A = (X-23)(X-2)-36^2 = X^2-25X-46-1296 = X^2-25X-1250 = (X-50)(X+25)$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{50, -25\}}$.

De plus

$$E_50(A) = \mathrm{Ker}(A-50I_2) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} -27 & -36 \\ -36 & -48 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$$

A est symétrique réelle donc ses espaces propres sont orthogonaux. Ainsi $E_{-25}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$.

Finalement

$$\boxed{E_{50}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad E_{-25}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)}$$

3. On se place dans $\boxed{\text{le repère orthonormé direct } \mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})}$ où $\boxed{\overrightarrow{e_1} = \dfrac{4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}}{5}}$ et $\boxed{\overrightarrow{e_2} = \dfrac{3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}}{5}}$

En notant (u,v) les coordonnées dans ce repère la conique $\mathcal{C}$ a pour équation

$$50u^2 - 25v^2 + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 & 69 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 108$$

Or

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 & 69 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -175 & 300 \end{pmatrix}$$

Ainsi, dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, $\mathcal{C}$ a pour équation

$$\boxed{50u^2 - 25v^2 - 35u + 60v = 108}$$

4. La matrice A a deux valeurs propres de signes opposées, ainsi $\boxed{\mathcal{C} \text{ est une hyperbole (éventuellement dégénérée)}}$.

5. On reprend l'équation dans $\mathcal{R}'$

$$50u^2 - 25v^2 - 35u + 60v = 108 \quad \Leftrightarrow \quad 50\left(u^2 - \frac{35}{50}u\right) - 25\left(v^2 - \frac{60}{25}v\right) = 108$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 50\left(u^2-\frac{7}{10}u\right)-25\left(v^2-\frac{12}{5}v\right)=108\\
&\Leftrightarrow \quad 50\left(u-\frac{7}{20}\right)^2-50\frac{49}{400}-25\left(v-\frac{6}{5}\right)^2+25\frac{144}{25}=108\\
&\Leftrightarrow \quad 50\left(u-\frac{7}{20}\right)^2-\frac{49}{8}-25\left(v-\frac{6}{5}\right)^2+36=108\\
&\Leftrightarrow \quad 50\left(u-\frac{7}{20}\right)^2-25\left(v-\frac{6}{5}\right)^2+=72+\frac{49}{8}\\
&\Leftrightarrow \quad 50\left(u-\frac{7}{20}\right)^2-25\left(v-\frac{6}{5}\right)^2=\frac{625}{8}\\
&\Leftrightarrow \quad \left(u-\frac{7}{20}\right)^2-\frac{\left(v-\frac{6}{5}\right)^2}{2}=\frac{625}{400}\\
&\Leftrightarrow \quad \left(u-\frac{7}{20}\right)^2-\frac{\left(v-\frac{6}{5}\right)^2}{2}=\frac{25}{16}
\end{aligned}$$

Calculs

Les calculs peuvent paraitre compliqués mais ce sont simplement des multiplications d'entiers. En prenant son temps et en posant les multiplications au brouillon on s'en sort sans encombres.

$\boxed{\text{Le centre de l'hyperbole est le point } \Omega \text{ de coordonnées } \left(\frac{7}{20},\frac{6}{5}\right) \text{ dans } \mathcal{R}'.}$

$\boxed{\text{Dans } \mathcal{R} \text{ ses coordonnées sont } \left(1,\frac{3}{4}\right).}$

En effet

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 3\\ -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{7}{20}\\ \frac{6}{5}\end{pmatrix}=\frac{1}{100}\begin{pmatrix}28+72\\ -21+96\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{L'axe focal est l'axe } (\Omega,\overrightarrow{e_1}).}$

$\boxed{\text{Les deux sommets sont les points de coordonnées } \left(\frac{7}{20}+\frac{5}{4},\frac{6}{5}\right)=\left(\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right) \text{ et } \left(-\frac{9}{10},\frac{6}{5}\right) \text{ dans } \mathcal{R}'}$

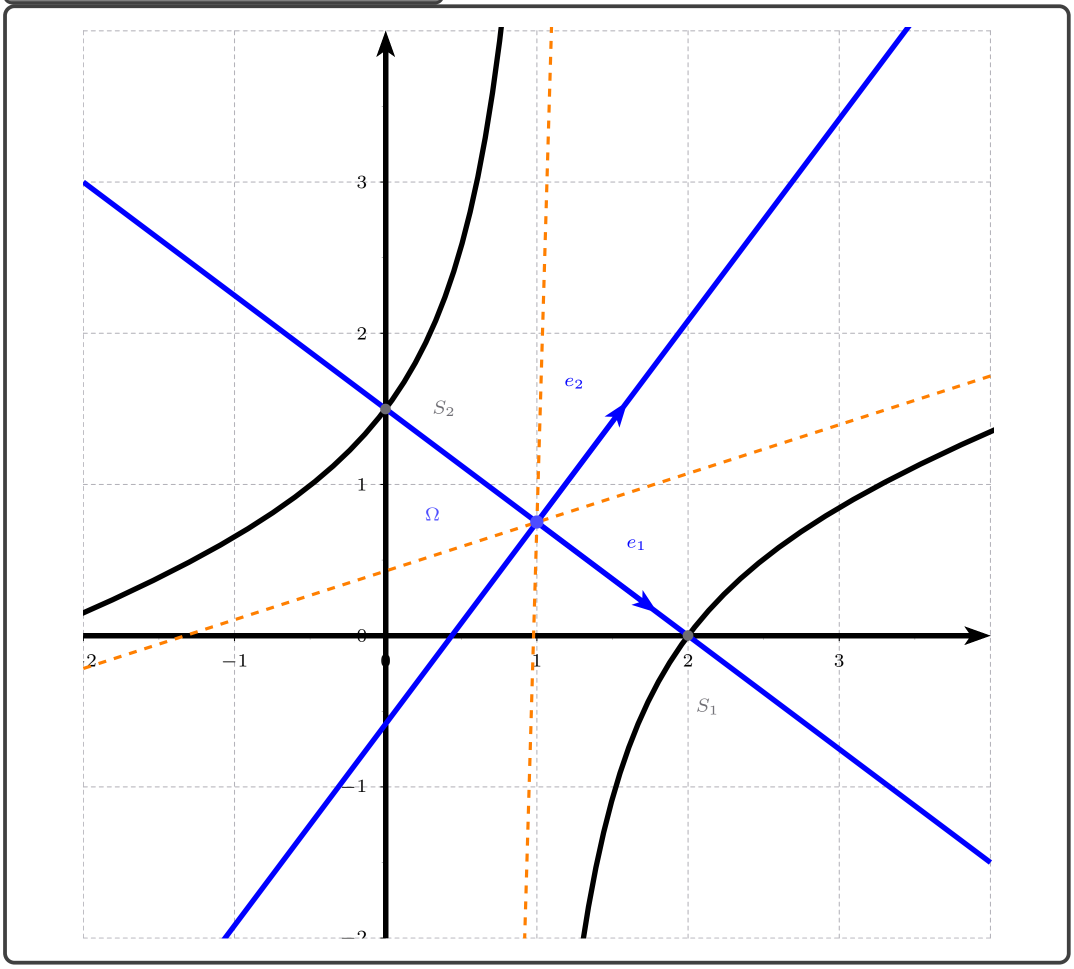
$\boxed{\text{Dans } \mathcal{R} \text{ leurs coordonnées sont } (2,0) \text{ et } \left(0,\frac{3}{2}\right).}$

$\boxed{\text{Dans } \mathcal{R}' \text{ les asymptotes sont les droites d'équation } v-\frac{6}{5}=\sqrt{2}\left(u-\frac{7}{20}\right) \text{ et } v=-\sqrt{2}\left(u-\frac{7}{20}\right).}$

Ce sont les droites passant par le centre Ω et dirigées respectivement par $\overrightarrow{e_1}+\sqrt{2}\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_1}-\sqrt{2}\overrightarrow{e_2}$. On en déduit que $\boxed{\text{leurs équations respectives dans } \mathcal{R} \text{ sont } (3-4\sqrt{2})(x-1)+(4+3\sqrt{2})\left(y-\frac{3}{4}\right)=0}$ et $\boxed{(4+3\sqrt{2})(x-1)+(4-3\sqrt{2})\left(y-\frac{3}{4}\right)=0}$

6. On obtient le tracé suivant

Figure 1 – Tracé de l'hyperbole $\mathcal{C}$



Corrigé de l'exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application de transposition $T : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^\top \end{array}$ est un élément de $\mathscr{L}(M_n(\mathbb{R}))$. Par stabilité par combinaison linéaire, il en va de même de $T + \mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{R})}$. On en déduit que

   $\boxed{\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(T + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

2. Soit $A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. On a alors

   $$\forall i \in [\![1,3]\!], \qquad A_{i,i} = -A_{i,i} \quad \text{donc} \quad \forall i \in [\![1,3]\!], \qquad A_{i,i} = 0$$

   En outre, si l'on note $\alpha = A_{3,2}$, $\beta = A_{1,3}$ et $\gamma = A_{2,1}$, on a $A_{2,3} = -\alpha$, $A_{3,1} = -\beta$ et $A_{1,2} = -\gamma$, d'où l'on tire

   $$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}}$$

3. On note, pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, $E_{i,j}$ la matrice dont le coefficient (i,j) vaut 1 et tous les autres valent 0. On pose par ailleurs $U = E_{3,2} - E_{2,3}$, $V = E_{1,3} - E_{3,1}$ et $W = E_{2,1} - E_{1,2}$. Remarquons que ces trois matrices sont bien éléments de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

   La question précédente se traduit en l'assertion

   $$\forall A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}), \quad \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \qquad A = \alpha U + \beta V + \gamma W,$$

   ce qui montre que (U, V, W) est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

Montrons maintenant la liberté de cette famille.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha U + \beta V + \gamma W = 0_3$. Cela signifie

$$\begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et l'on obtient $\alpha = \beta = \gamma = 0$ en considérant les coefficients $(3, 2)$, $(1, 3)$ et $(2, 1)$ de part et d'autre de cette égalité.

Ainsi, (U, V, W) est une famille libre et génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, ce qui montre que $\boxed{\text{la famille } (U, V, W) \text{ est une base de } \mathcal{A}_3(\mathbb{R}).}$

Puisqu'il admet une base de cardinal 3, $\boxed{\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \text{ est de dimension } 3}$.

4. Soit $A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. On a

$$\det(A) = \det(A^\top) = \det(-A) = (-1)^3 \det(A) = -\det(A)$$

ce qui démontre que $\boxed{\det(A) = 0}$.

5. Notons $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et, pour tout $w \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{rcccc} \phi_w & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & v & \mapsto & w \wedge v. \end{array}$$

La bilinéarité du produit vectoriel montre que ϕ_w est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Soit maintenant $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et $w = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} \phi_w(e_1) = w \wedge e_1 &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \\ -\beta \end{pmatrix} \\ \phi_w(e_1) = w \wedge e_2 &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \\ \phi_w(e_1) = w \wedge e_3 &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(\phi_w) = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} = \alpha U + \beta V + \gamma W.$$

Ainsi, étant donné $A \in A_3(\mathbb{R})$, on a l'équivalence

$$\exists! w \in \mathbb{R}^3 : \operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(\phi_w) = A \Leftrightarrow \exists! (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 : A = \alpha U + \beta V + \gamma W,$$

et la deuxième assertion est vraie, précisément car (U, V, W) est une base de $A_3(\mathbb{R})$, comme on l'a montré à la question précédente. La première l'est donc aussi, ainsi

$\boxed{\text{Pour tout } A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}), \text{ il existe un unique vecteur } w \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } A \text{ soit la matrice de l'application } v \mapsto w \wedge v \text{ dans la base canonique de } \mathbb{R}^3.}$

6. (a) La matrice d'une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ est un élément de $SO_3(\mathbb{R})$. On a donc

$$\begin{aligned} \left(R - R^{-1}\right)^\top &= \left(R - R^\top\right)^\top && \textit{(car } R \textit{ orthogonale)} \\ &= R^\top - R \\ &= -(R - R^\top) \\ &= -(R - R^{-1}), \end{aligned}$$

ce qui montre que $\boxed{R - R^{-1} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})}$.

(b) Supposons par l'absurde que l'unique vecteur w de $\mathbb{R}^3$ tel que $R - R^{-1}$ soit la matrice de l'application $u : v \mapsto w \wedge v$ soit le vecteur nul. Autrement dit, on suppose que

$$R - R^\top = R - R^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\phi_{0_{\mathbb{R}^3}}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}) = 0_3,$$

c'est-à-dire que R est symétrique.

La matrice R est donc à la fois orthogonale et symétrique, ce qui entraîne que

$$R^\top = R^{-1} = R,$$

ou encore que $R^2 = I$.

Comme $R^2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(r^2)$, on en déduit $r^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Or, r étant une rotation d'un certain angle $\omega \not\equiv 0[\pi]$, r^2 est une rotation d'angle $2\omega \not\equiv 0[2\pi]$. En particulier, on ne peut pas avoir $r^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, $\boxed{\text{ce qui nous fournit la contradiction souhaitée}}$.

Hypothèse manquante

L'énoncé oublie manifestement d'exclure le cas $r = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, rotation d'angle nul. Je rétablis cette hypothèse.

(c) On a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = R - R^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(r - r^{-1})$.

Ainsi $u = r - r^{-1}$.

L'égalité $r(v) = v$ permet d'obtenir, en appliquant r^{-1}, $v = r^{-1}(v)$. On a donc

$$\begin{aligned} u(v) &= (r - r^{-1})(v) \\ &= r(v) - r^{-1}(v) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$\boxed{\text{ce qui était demandé}}$.

L'axe de r étant par définition $\mathrm{Ker}(r - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, ce qui précède s'applique notamment à un vecteur directeur v de l'axe de r. On a donc $u(v) = 0$, c'est-à-dire $w \wedge v = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Cela montre que w et v sont colinéaires. Comme ils sont tous les deux non nuls (v, par définition d'un vecteur directeur et w, par la question précédente), on en déduit qu'il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que $w = \lambda v$. En particulier, $\boxed{w \text{ est également un vecteur directeur de l'axe de } r}$.

(d) i. Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On a alors

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Comme r^{-1} est la rotation d'axe $\overrightarrow{w}$ et d'angle $-\theta$, on a

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(r^{-1}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

ii. On a

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(r) - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(r^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sin\theta & 0 \\ 2\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

iii. Par ailleurs, on a, car la base $\mathscr{B}$ est orthonormée directe

$$\begin{aligned} (2\sin\theta\, e_3) \wedge e_1 &= 2\sin\theta\, e_2 \\ (2\sin\theta\, e_3) \wedge e_2 &= -2\sin\theta\, e_1 \\ (2\sin\theta\, e_3) \wedge e_3 &= 0_{\mathbb{R}^3}. \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi_{2\sin\theta\, e_3})$, et donc que $\phi_w = u = \phi_{2\sin\theta\, e_3}$. D'après la question 5. (et plus précisément le résultat d'unicité), on en déduit que $w = 2\sin\theta\, e_3$, c'est-à-dire que $w = \dfrac{2\sin\theta}{\|w\|} w$.

Comme w est non nul, la famille (w) est libre et on peut tirer de cette égalité l'égalité $\dfrac{2\sin\theta}{\|w\|} = 1$, et donc $\sin\theta = \dfrac{1}{2}\|w\| > 0$.

On a montré à la question 6.(*b*) que la matrice de u dans la base canonique ne pouvait pas être nulle, cela entraîne que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \neq 0_{M_3(\mathbb{R})}$. Vu ce qui précède, on en déduit directement $\sin\theta \neq 0$.

Par ailleurs, la trace de deux matrices semblables (et donc de deux matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes) étant égales, on a

$$\mathrm{Tr}(R) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(r)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(r)) = 1 + 2\cos\theta,$$

donc $\boxed{\cos\theta = \dfrac{\mathrm{Tr}(R) - 1}{2}}$.

Comme $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\sin\theta > 0$, on a $\theta \in]0, \pi[$, et on a ainsi

$$\begin{aligned}\theta &= \arccos\cos\theta \\ &= \arccos\frac{\mathrm{Tr}\,R - 1}{2}.\end{aligned}$$

(e) Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de R.

On constate par le calcul que C_1 et C_2 sont orthogonales et de norme 1. De plus $C_1 \wedge C_2 = C_3$.

Ainsi R est une matrice orthogonale de déterminant 1.

On va exploiter les questions précédentes :

$$\begin{aligned}R - R^{-1} &= R - R^{\top} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

qui est la matrice de ϕ_w dans la base canonique, où $w = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Comme par ailleurs $\mathrm{Tr}(R) = 1$, on en déduit que

L'endomorphisme associé à R dans la base canonique est la rotation d'axe la droite dirigée et orienté par le vecteur de coordonnées $(1, 1, 1)$ et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

Réponse du problème

Questions de cours

1. On a d'après la formule du binôme de Newton

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \mathcal{B}_{k,n}(X) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= (X + (1-X))^n \\ &= 1.\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \mathcal{B}_{k,n}(X) = 1}$$

2. (a) D'après le coursil s'agit de $\boxed{\text{la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } t.}$

(b) Toujours d'après le cours, on a

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = nt \qquad \mathbb{V}(X_n) = nt(1-t)}$$

(c) On peut prendre par exemple

$\boxed{\text{la variable aléatoire comptant le nombre de pile d'une suite de } n \text{ lancers d'une pièce éventuellement truquée dont la probabilité de tomber sur pile serait } t.}$

3. $\boxed{\mathbb{R}_n[X] \text{ est un } \mathbb{R} \text{ espace vectoriel de dimension } n+1}$.

4. On dit que deux sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels E et F d'un espace préhilbertien sont orthogonaux pour le produit scalaire φ si

$$\boxed{\forall x \in E, \quad \forall y \in F, \qquad \varphi(x,y) = 0}$$

Préliminaires

5. On a par un calcul immédiat

$$\boxed{\mathcal{B}_{0,2}(X) = (1-X)^2 = X^2 - 2X + 1 \qquad \mathcal{B}_{1,2}(X) = 2X(1-X) = -2X^2 + 2X \qquad \mathcal{B}_{2,2}(X) = X^2}$$

et

$$\boxed{\mathcal{B}_{0,3}(X) = (1-X)^3 = -X^3 + 3X^2 - 3X + 1 \qquad \mathcal{B}_{1,3}(X) = 3X(1-X)^2 = 3X^3 - 6X^2 + 3X}$$

$$\boxed{\mathcal{B}_{2,3}(X) = 3X^2(1-X) = -3X^3 + 3X^2 \qquad \mathcal{B}_{3,3}(X) = X^3}$$

6. Les calculs précédents montrent que la matrice de la famille $\{\mathcal{B}_{0,2}, \mathcal{B}_{1,2}, \mathcal{B}_{2,2}\}$ dans la base $\{1, X, X^2\}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle est triangulaire inférieure et son déterminant vaut 2 et est donc non nul. Ainsi cette matrice est inversible et on en déduit que $\boxed{\text{la famille } \{\mathcal{B}_{0,2}, \mathcal{B}_{1,2}, \mathcal{B}_{2,2}\} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$

7. La question précédente invite à employer le même raisonnement. En effet pour $0 \leqslant k \leqslant n$ le degré du plus petit monôme non nul de $\mathcal{B}_{k,n}(X)$ est k et son coefficient est $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Ainsi si l'on considère la matrice de la famille $\{\mathcal{B}_{k,n}\}_{0 \leqslant k \leqslant n}$ dans la base $\{1, \cdots, X^n\}$, elle sera toujours triangulaire inférieure avec tout ses coefficients non nuls sur la diagonale et donc de déterminant non nul (ce déterminant vaut en fait $\prod_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$). Donc le même raisonnement que dans la question précédente montre que $\boxed{\text{la famille } \{\mathcal{B}_{k,n}\}_{0 \leqslant k \leqslant n} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$

Partie I — Un produit scalaire

8. (a) La fonction φ est évidemment $\boxed{\text{symétrique}}$. Elle est de plus linéaire en sa première variable car l'évaluation en un point et linéaire et donc l'application $P \mapsto \varphi(P,Q)$ (où Q est fixé) est une combinaison linéaire d'applications linéaires. Ainsi par symétrie l'application φ est $\boxed{\text{bilinéaire}}$.

De plus si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $\varphi(P,P)$ est une somme de carré donc est positif. Ainsi φ est $\boxed{\text{positive}}$.

Enfin supposons que $\varphi(P,P) = 0$ pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors, une somme de terme positifs étant nulle si et seulement si chacun des termes est nul, il vient

$$\begin{cases} P(0)^2 = 0 \\ P(1)^2 = 0 \\ \dfrac{1}{4}\left(P\left(\dfrac{1}{2}\right) - P(1) - P(0)\right)^2 = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $P(0) = P(1) = P\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$. Or P est un polynôme de degré 2, et ayant 3 racines c'est donc nécessairement le polynôme nul. $\boxed{\text{Ainsi } \varphi \text{ est bien un produit scalaire sur } \mathbb{R}_2[X].}$

(b) On utilise le procédé de Gram-Schmidt. On remarque que

$$\varphi(X^2, X^2) = 0 + 1 + \frac{1}{4}\left(4\frac{1}{4} - 1 - 0\right)^2 = 1$$

et donc $\mathcal{B}_{2,2}(X) = X^2$ est de norme 1. On calcule ensuite

$$X - \varphi(X, X^2)X^2$$

Or $\varphi(X, X^2) = 1$, et finalement

$$X - \varphi(X, X^2)X^2 = X - X^2$$

De plus

$$\varphi(X - X^2, X - X^2) = 0 + 0 + \frac{1}{4}\left(4\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

donc le vecteur $X - X^2$ est de norme $\frac{1}{2}$ et le deuxième vecteur de la base orthonormale obtenue est donc $2(X - X^2) = \mathcal{B}_{1,2}(X)$. Enfin pour obtenir le dernier vecteur on calcule

$$1 - \varphi(1, \mathcal{B}_{1,2}(X))\mathcal{B}_{1,2}(X) - \varphi(1, X^2)X^2 = 1 - 4\varphi(1, X - X^2)(X - X^2) - \varphi(1, X^2)X^2$$

or

$$\varphi(1, X^2) = 1$$
$$\varphi(1, X - X^2) = \frac{1}{2}$$

On en déduit que le vecteur $1 - 4\frac{1}{2}(X - X^2) - X^2 = 1 - 2X + X^2 = \mathcal{B}_{0,2}(X)$ est orthogonal à $\mathcal{B}_{1,2}(X)$ et $\mathcal{B}_{2,2}(X)$. De plus

$$\varphi(\mathcal{B}_{0,2}(X), \mathcal{B}_{0,2}(X)) = 1$$

Ainsi $\boxed{\text{le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt partant de la famille } \left\{X^2, X, 1\right\} \text{ donne la famille orthonormale } \{\mathcal{B}_{2,2}(X), \mathcal{B}_{1,2}(X), \mathcal{B}_{0,2}(X)\}.}$

9. (a) La matrice M est symétrique à coefficients réels, donc, d'après le théorème spectral, $\boxed{\text{elle est diagonalisable en base orthonormée}}$.

(b) On a $\chi_M = (X - 4)(X + 2)^2$. Ainsi $\mathrm{Sp}(M) = \{-2, 4\}$.

De plus on a

$$\mathrm{Ker}(M + 2I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$
$$\mathrm{Ker}(M - 4I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$$

Ainsi les vecteurs

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} \qquad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

forment une base orthonormale de vecteurs propres de M. On a donc en posant

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}}$$

que Q est une matrice de passage d'une base orthonormée (la base canonique de $\mathbb{R}^3$) à une autre. C'est donc une matrice orthogonale et son inverse est sa transposée. On a ainsi

$$\boxed{Q^{-1} = Q^\top = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.}$$

et $\boxed{D = Q^{-1}MQ}$.

(c) De la question précédente on en déduit que f admet les valeurs propres -2 de multiplicité deux et 4 de multiplicité un, et que en posant

$$\begin{aligned} e_1(X) &= -\mathcal{B}_{2,2}(X) + \mathcal{B}_{1,2}(X) - \mathcal{B}_{2,2}(X) \\ e_2(X) &= -\mathcal{B}_{2,2}(X) + \mathcal{B}_{0,2}(X) \\ e_3(X) &= \mathcal{B}_{2,2}(X) + 2\mathcal{B}_{1,2}(X) + \mathcal{B}_{0,2}(X) \end{aligned}$$

alors on a

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f + 2\mathrm{Id}) = \operatorname{Vect}(e_1(X), e_2(X)) \qquad \operatorname{Ker}(f - 4\mathrm{Id}) = \operatorname{Vect}(e_3(X))}$$

Polynômes

f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, ses espaces propres sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$, en particulier ce sont des ensembles de polynômes, pas de triplets de réels.

(d) Les coordonnées des vecteurs $e_1(X), e_2(X), e_3(X)$ dans la base orthonormale $(\mathcal{B}_{2,0}(X), \mathcal{B}_{1,2}(X), \mathcal{B}_{2,2}(X))$ sont données respectivement par les vecteurs

$$g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Or un produit scalaire se calcule comme s'il s'agissait du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ dès lors que l'on dispose des coordonnées dans une base orthonormale. Ainsi les vecteurs g_1, g_2, g_3 étant orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, les vecteurs $e_1(X), e_2(X), e_3(X)$ sont orthogonaux pour le produit scalaire φ, on en déduit que $\boxed{\text{les espaces propres de } f \text{ sont orthogonaux pour } \varphi.}$

10. On considère l'application suivante $\varphi_n \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k \end{array}$

où $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathcal{B}_{k,n}(X)$ et $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \beta_k \mathcal{B}_{k,n}(X)$ (ces coefficients existent et sont uniques puisque la famille $\{\mathcal{B}_{k,n}(X)\}_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ d'après la question 3).

Alors cette application est évidemment symétrique, bilinéaire et positive. Si $\varphi_n(P, P) = 0$ pour un polynôme P, alors ceci nous donne que tous les coefficients α_k sont nuls puisque la famille $\{\mathcal{B}_{k,n}(X)\}_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ d'après la question 7, et donc P est nécessairement le polynôme nul.

Ainsi φ_n est un produit scalaire. De plus il est construit de telle façon que pour tout $i, k \in \{0, \cdots, n\}$ on ait $\varphi_n(\mathcal{B}_{i,n}(X), \mathcal{B}_{k,n}(X)) = \delta_{i,n}$.

Finalement $\boxed{\text{Il existe un produit scalaire sur } \mathbb{R}_n[X] \text{ pour lequel la famille } \{\mathcal{B}_{k,n}\}_{0 \leqslant k \leqslant n} \text{ est orthonormale.}}$

Partie II — Une première courbe de Bézier dans le plan

11. (a) On utilise la définition d'une courbe de Bézier et le résultat de la question 5 . On a pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \Gamma_1(t) &= \mathcal{B}_{0,3}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{B}_{1,3}(t) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathcal{B}_{2,3}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathcal{B}_{3,3}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6t^3 - 12t^2 + 6t \\ 6t^3 - 12t^2 + 6t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3t^3 + 3t^2 \\ -9t^3 + 9t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^3 \\ -t^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6t - 9t^2 + 4t^3 \\ 6t - 3t^2 - 4t^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc on a

$$\boxed{\forall t \in [0,1], \qquad \Gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 6t - 9t^2 + 4t^3 \\ 6t - 3t^2 - 4t^3 \end{pmatrix}}$$

(b) On peut remarquer que

la courbe Γ_1 n'est autre que la portion de la courbe Γ_2 lorsque le paramètre parcourt uniquement l'intervalle $[0, 1]$.

12. (a) Les fonctions x_2 et y_2 étant des polynômes, elles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pourront au cours de l'étude être dérivées autant de fois que nécessaire. On a, pour $t \in \mathbb{R}$

$$x_2'(t) = 6 - 18t + 12t^2 = 12\left(t - \frac{1}{2}\right)(t-1)$$
$$y_2'(t) = 6 - 6t - 12t^2 = -12\left(t - \frac{1}{2}\right)(t+1)$$

On obtient les tableaux de variations suivants

t	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x_2'(t)$		$+$			0	$-$	0	$+$	
x_2	$-\infty$	$\nearrow$	-19	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$y_2'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
y_2	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$\frac{7}{4}$	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

(b) D'après les tableaux de variations obtenus à la question précédente,

la courbe Γ_2 admet au point de paramètre $t = 1$ une tangente verticale et

elle admet au point de paramètre $t = -1$ une tangente horizontale.

(c) La tangente à Γ_2 en $t = 0$ est la droite dirigée par $\Gamma_2'(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ et passant par $\Gamma_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: il s'agit donc de la première bissectrice : Une équation cartésienne de la tangente à Γ_2 en $t = 0$ est $y = x$.

(d) D'après les tableaux de variation obtenus à la question 2.a, le point singulier est le point de paramètre $t = \dfrac{1}{2}$. On a

$$x_2''\left(\frac{1}{2}\right) = -6, \qquad y_2''\left(\frac{1}{2}\right) = -18,$$
$$x_2'''\left(\frac{1}{2}\right) = 24, \qquad y_2'''\left(\frac{1}{2}\right) = -24$$

Les vecteurs $\Gamma_2''\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $\Gamma_2'''\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ne sont pas colinéaires, ainsi d'après le cours

$\boxed{\Gamma_2\left(\dfrac{1}{2}\right) \text{ est un point de rebroussement de première espèce.}}$

De plus toujours d'après le cours la tangente est la droite passant par $\Gamma_2\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et dirigée par $\Gamma_2''\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Son équation est donnée par

$$\begin{vmatrix} -6 & \dfrac{5}{4} - x \\ -18 & \dfrac{7}{4} - y \end{vmatrix} = 0$$

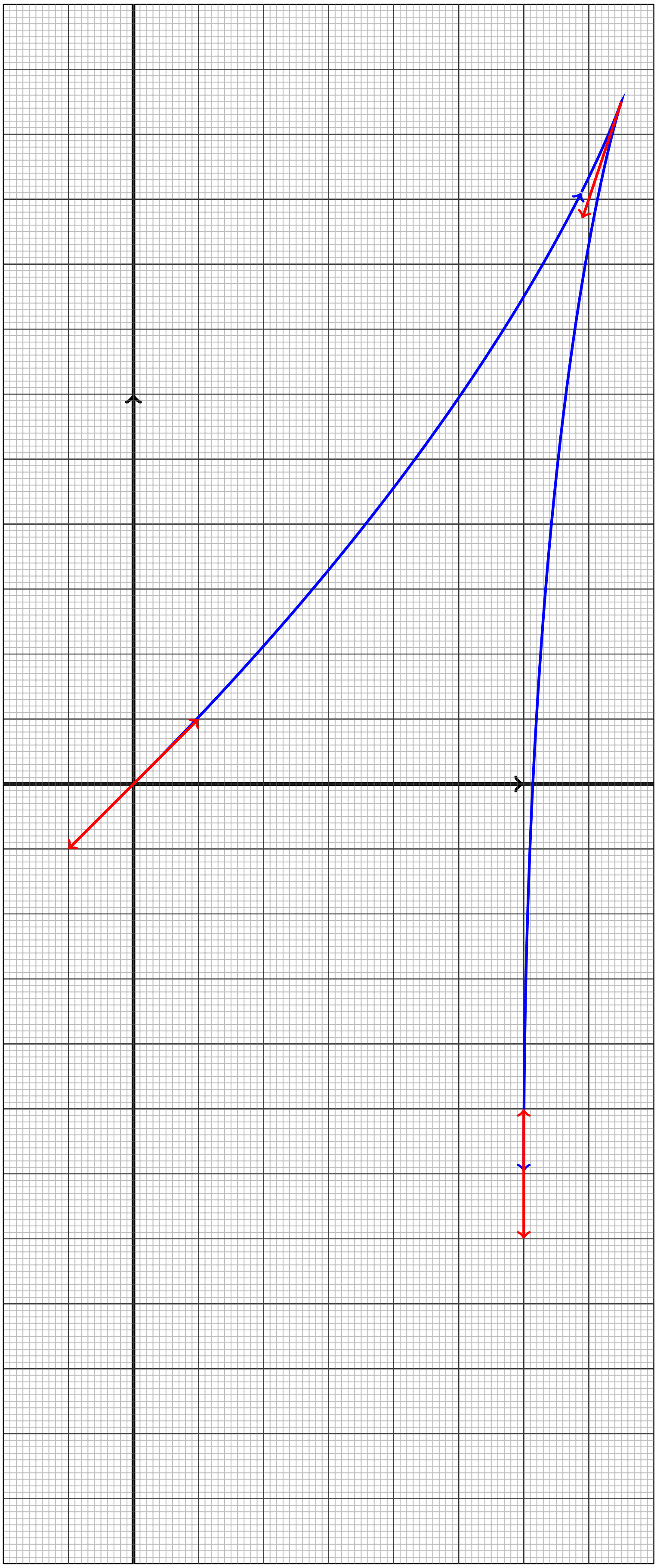
C'est-à-dire $\boxed{y - 3x = -2}$.

(e) La courbe admet des branches infinies lorsque le paramètre tend vers $\pm\infty$ d'après le tableau de variation obtenu en 2.*b*. Or $\displaystyle\lim_{t \to \pm\infty} \frac{x_2(t)}{y_2(t)} = -1$ et $\displaystyle\lim_{t \to \pm\infty} x_2(t) + y_2(t) = -\infty$

Ainsi $\boxed{\text{la courbe admet des branches paraboliques de direction asymptotique la droite d'équation } y = -x.}$

13. On obtient le tracé suivant

Figure 2 – Tracé de Γ_1



Partie III — Le cas général

14. On a d'après la définition de la courbe de Bézier que $\boxed{\Gamma(0) = A_0 \text{ et } \Gamma(1) = A_n}$.
15. La fonction Γ étant polynomiale elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle de définition. Or

$$\begin{aligned}\Gamma'(0) &= \sum_{k=0}^{n} \mathcal{B}'_{k,n}(0)\overrightarrow{OA_k} \\ &= -n\overrightarrow{OA_0} + n\overrightarrow{OA_1} \\ &= n\overrightarrow{A_0A_1}.\end{aligned}$$

Ce vecteur étant non nul, c'est le vecteur directeur de la tangente en A_0 et, la tangente à Γ en A_0 étant la droite passant par A_0 et dirigée par $n\overrightarrow{A_1A_0}$, on en déduit bien que $\boxed{\text{la tangente à } \Gamma \text{ en } A_0 \text{ est la droite } (A_0A_1).}$

16. D'après la question 7, il existe $(p_0, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_i\mathcal{B}_{k,n}(X)$ et, de même, il existe $(q_0, \cdots, q_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q_i\mathcal{B}_{k,n}(X)$.

En posant A_i le point de coordonnées $\begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix}$, on en déduit que la courbe Λ est la courbe de Bézier associée aux points de contrôle $A_0, \cdots, A_n$.

Ainsi $\boxed{\text{il est possible de trouver } A_0, \cdots, A_n \text{ tel que la courbe } \Lambda \text{ soit la courbe de Bézier associée à ces points.}}$